1 : Numéro d'exercice.

1 C : Numéro d'exercice corrigé.

15' : Exercice à faire pendant Le temps indiqué (en minutes).

3 Points : Barème par exercice.

Niveau de difficulté : Facile

Niveau de difficulté : Moyen

Niveau de difficulté : Difficile

Niveau de difficulté : Très Difficile

1 Exercice — 30' — 5 Points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,-1)$, $B(1,3,5)$, $C(-7,2,2)$ et $H(-1,4,3)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est $x-2y-2z+15=0$.

c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC).

2°) On considère l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$.

a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R.

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AH]$.

c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC).

3°) Soit J $(0,0,1)$.

a) Vérifier que J appartient à S.

b) Calculer la distance du point I à la droite (AJ).

c) En déduire que la droite (AJ) est tangente à S.

d) Donner une représentation paramétrique de la droite (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC).

2 Exercice — 20' — 5 Points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(4,2,2)$, $B(5,-2,3)$ et $C(1,1,1)$ et la droite $\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$.

On désigne par (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite Δ.

1°) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est $2x+y+2z-14=0$.

b) Vérifier que $B\in(P)$ et que $C\notin(P)$.

c) Vérifier que $C\in\Delta$ et que $A\notin\Delta$.

2°) Soit le point $D(3, 2, 3)$.

a) Montrer que D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

b) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCD$.

3°) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire la distance d du point D à la droite (AB).

b) Vérifier que $\mathcal{V} = \dfrac{AB \times d \times CD}{6}$.

3 Exercice — 20' — 5 Points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2, 1, 0)$, $B(2,-1,-2)$, $C(0, 1,-2)$ et le plan $(P): x+y-z-3=0$.

1°) Vérifier que A, B et C appartiennent au plan (P).

2°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que (P) et (S) se coupent suivant le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3°) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan (P).

a) Montrer qu'un système paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=-2-\alpha \end{cases} ; \alpha \in IR.$

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G du plan (P) et la droite Δ.

c) Vérifier que G est le centre de gravité du triangle ABC.

d) En déduire le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

4 Exercice — 35′ — 6 Points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,1), B(0,2,1) et C(1,2,0) .

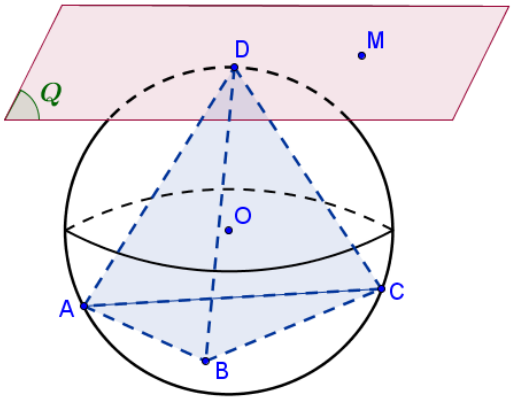
1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$.

2°) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que *A*, *B* et *C* sont des points de la sphère S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.



3°) Soit le point *D* de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par *D* et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point *D*.

4°) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AM}$.

b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre *MABC* est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

c) En déduire que pour tout point *M* du plan Q ; $\mathcal{V}=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

5 Exercice — 30′ — 5 Points

Dans l'espace muni un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-4=0$.

c) Montrer que l'aire du triangle *ABC* est égale à $8\sqrt{3}$.

2°) Soit le point $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

a) Montrer que le point *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*.

b) Montrer que [*OG*] est la hauteur issue de *O* du tétraèdre *OABC*.

3°) On donne les points *I*, *J* et *K* milieux respectifs des segments [*AC*], [*AB*] et [*BC*].

a) Justifier que : $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire l'aire du triangle *IJK*.

4°) On désigne respectivement par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ les volumes des tétraèdres *OABC* et *OIJK*.

Montrer que : $\mathcal{V}'=\frac{1}{4}\mathcal{V}$.

6 Exercice — 30′ — 6 Points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2°) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a) Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b) Calculer la distance IJ.

3°) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4°) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) Vérifier que N est un point de la sphère S.

b) Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d) En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal.

7 Exercice — 20′ — 4 Points

Les questions 1°) et 2°) sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face $ABCD$ est le point I.

Aucune figure n'est demandée sur la copie

1°) a) Déterminer $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Déterminer l'ensemble ($\mathcal{F}$) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

2°) On appelle P le barycentre du système { $(A, 2)$; $(C, -1)$}.

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit ($\mathcal{H}$) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Déterminer l'ensemble ($\mathcal{H}$).

c) Montrer que le point A appartient à l'ensemble ($\mathcal{H}$).